**DẠNG 7: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT**

1. **Bài toán**

**Bài 1:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Bài 2:** a) Tìm GTLN : 

b) Tìm GTLN : 

**Bài 3:** Cho  Tìm giá trị nhỏ nhất (của biểu thức



**Bài 4:** Cho là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của:



**Bài 5:** Cho số thực x thỏa mãn điều kiện Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài 6:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Bài 7:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức với là số nguyên.

**Bài 8:** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a)  b) 

**Bài 9:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Bài 10:** Tìm giá trị nhỏ nhất của: 

**Bài 11:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài 12:** Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của

**Bài 13:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài 14:** Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Bài 15:**

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: 
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: 

**Bài 16:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Bài 17:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức sau (nếu có):



**Bài 18:** Tìm giá trị nhỏ nhất của



**Bài 19:** Cho biểu thức 

a) Rút gọn 

b) Tìm giá trị lớn nhất của 

**Bài 20:** Cho thỏa mãn Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Bài 21:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Bài 22:** Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Bài 23:** Cho biểu thức 

1. Tìm điều kiện xác định và rút gọn 
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của  khi 

**Bài 24:**  Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Bài 25:**  Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Bài 26:**  Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức : 

**Bài 27:**

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: 
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: 

**Bài 28:**  Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : 

**Bài 29:**  Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Bài 30.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức biết:



**Bài 31.** Cho là các số dương thỏa mãn 

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Bài 32.** Tìm giá trị nhỏ nhất : 

**Bài 33.**Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: 

**Bài 34.** Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện 0 ≤ a, b, c ≤ 2 và a + b + c = 3

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = a2 + b2 + c2.

**Bài 35.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: .

**Bài 36.** Cho . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài 37.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Bài 38**. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Bài 39.** Cho các số thực dương thỏa mãn 

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài 40:** Cho là các số thực dương thỏa mãn: 

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Bài 41:** Cho và Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Bài 42:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



**Bài 43:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài 44:** Cho hai số không âm và  thỏa mãn: Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:



**Bài 45:** Cho là các số dương thỏa mãn Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài 46:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : 

**Bài 47:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Bài 48:** Cho biểu thức 

1. Rút gọn 
2. Tìm giá trị lớn nhất của 

**Bài 49:** Cho thỏa mãn Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Bài 50:** Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Bài 51:** Cho và Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Bài 52:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: 

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: 

**Bài 53:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Bài 54:** Tìm các giá trị của  để biểu thức:

có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Bài 55:** Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Bài 56:** Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Bài 57:** Tìm giá trị nhỏ nhất của M = 4x2 + 4x + 5

**Bài 58:** Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: .

**Bài 59:** Tìm giá trị của biến *x* để:

a)  đạt giá trị lớn nhất b)  đạt giá trị nhỏ nhất

**Bài 60: :** a) Tìm GTLN của 

b) Tìm GTNN của biểu thức  , với 

**Bài 61:** Tìm GTNN của:

a)  ; b)  ;

c) 

**Bài 62:**  Cho hai số x và y thoả mãn điều kiện: 

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức ;
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Bài 63:** a) Cho x, y là các số dương thoả mãn .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

b) Tìm GTLN của 

**Bài 64:** a) Cho , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

b) Tìm GTNN của 

**Bài 65:** a) Tìm GTNN của biết 

b) Tìm GTNN của 

c) Tìm GTNN của 

d) Tìm GTLN của  với 

**Bài 66:** Tìm giá trị nhỏ nhất của  và các giá trị của  tương ứng.

**Bài 67:** Cho thỏa mãn Tìm giá trị nhỏ nhất của  GTLN

**Bài 68:** Cho hai số không âm và  thỏa mãn: Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:



**Bài 69:** Cho hai số dương thỏa mãn: 

Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Bài 70:** Cho là các số thực không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của:biết 

**Bài 71:** Tìm các giá trị của để biểu thức:có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Bài 72:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài 73:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài 74:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Bài 75:** Cho Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : 

**Bài 76:** Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: .

**Bài 77:** Tìm giá trị của biến *x* để:

a)  đạt giá trị lớn nhất b)  đạt giá trị nhỏ nhất

**Bài 78:** a) Tìm GTLN của 

b) Tìm GTNN của biểu thức  , với 

**Bài 79:** Tìm GTNN của:

a)  ; b)  ; c) 

**Bài 80:** Cho hai số x và y thoả mãn điều kiện: 

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức ;
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Bài 81:** a) Cho x, y là các số dương thoả mãn .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

b) Tìm GTLN của 

**Bài 82:** a) Tìm GTNN của biết 

b) Tìm GTNN của 

c) Tìm GTNN của 

d) Tìm GTLN của  với 

**Bài 83:** **:** a) Cho , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

b) Tìm GTNN của 

**Bài 84:** Tìm giá trị nhỏ nhất của  và các giá trị của  tương ứng.

**Bài 85:** Cho và Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Bài 86:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

**Bài 87:** Cho hai số không âm a và b thỏa mãn: a2 + b2 = a + b. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

**Bài 88:** Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn x + y + z =1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

**Bài 89:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

**Bài 90:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài 91:** a. Tìm giá trị lớn nhất của tổng x + y + z biết rằng x + 5y = 21 và 2x + 3z = 51 với x, y, z  0

b. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của các phân thức B = 

**Bài 92:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**Bài 93:** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Bài 94:** Cho các số a, b,c thỏa mãn a + b + c = . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = a2 + b2 + c2

**Bài 95:** Cho hai số dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Bài 96:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức , trong đó *x*, *y* là các số thực thoả mãn điều kiện: .

**Bài 97:**

a) Cho thoả mãn .



Tìm GTNN của biểu thức .



b) Cho thoả mãn .



Tìm GTNN của biểu thức .



**Bài 98:**

Cho *m*, *n* là các số thực thay đổi sao cho . Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:.

**Bài 99:** Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Bài 100:** Cho là các số thực dương thỏa mãn:



Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Bài 101:** Cho các số thực dương thỏa mãn



Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



**Bài 102:** Cho hai số thỏa mãn điều kiện Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức



**Bài 103:** Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Bài 104:** Cho là các số dương thỏa mãn 

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : 

**Bài 105**: Cho là 3 số dương thỏa mãn: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Bài 106:** Cho Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Bài 107**: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài 108:** Cho và Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Bài 109:**

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: 
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: 
3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài 110:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**B. HƯỚNG DẪN**

**Bài 1:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**

****

Dấu xảy ra 

Vậy 

**Bài 2:** a) Tìm GTLN : 

b) Tìm GTLN : 

**Lời giải**

a)P=

1. 





Suy ra 

b) 

Q đạt GTLN đạt GTNN mà 

của C là 

**Bài 3:** Cho  Tìm giá trị nhỏ nhất (của biểu thức



**Lời giải**

Do: với 

Ta có: 





**Bài 4:** Cho là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của:



**Lời giải**

****

****

Vậy 

**Bài 5:** Cho số thực thỏa mãn điều kiện Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**

Đặt Biểu thức đã cho trở thành:

    

\*) Vì 

Đẳng thức xảy ra khi 

Vậy 

\*) nên và  là hai số không âm

Áp dụng BĐT Cô si ta có: 

Đẳng thức xảy ra khi hay 

Vậy 

**Bài 6 :** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : 

**Lời giải**

Ta có:



Vậy 

**Bài 7:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức với là số nguyên.

**Lời giải**

* Xét 
* Xét thì do nên 

+ Khi 

+ Khi 

+ Khi 

Vậy 

**Bài 8:** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a)  b) 

**Lời giải**

a) Áp dụng tính chất dấu xảy ra ta có:



Dấu “=” xảy ra  và và 

Vậy 

b) Ta có 



Với mọi ta có: 



**Bài 9:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Lời giải**

Ta có: 

. Dấu bằng xảy ra 

Vậy 

**Bài 10:** Tìm giá trị nhỏ nhất của : 

**Lời giải**

****

Đặt 

Khi đó: 

Vậy 

**Bài 11:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

**Lời giải**





Chứng tỏ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 

Vậy 

**Bài 12:** Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của

**Lời giải**

Ta có: 



Ta có:



**Bài 13:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**

Biến đổi để có:



Vì và nên 



Do đó: 

Dấu xảy ra khi và chỉ khi 



**Bài 14:** Tìm giá trị nhỏ nhất của



**Lời giải**



Vậy giá trị nhỏ nhất của



**Bài 15:** a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:



b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:



**Lời giải**

a) Ta có:



Do Nên 

Dấu xảy ra 



Vậy GTNN của là 



b) 

Do nên Dấu xảy ra



Vậy của là 



**Bài 16:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Lời giải**

Ta có: 



Vậy 

**Bài 17:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức sau (nếu có):



**Lời giải**

Ta có 

Vì 

Vậy 

**Bài 18:** Tìm giá trị nhỏ nhất của



**Lời giải**



Đẳng thức xảy ra



Giá trị nhỏ nhất của B là



**Bài 19:** Cho biểu thức 

a) Rút gọn  b) Tìm giá trị lớn nhất của 

**Lời giải**

a)

****

Vậy với mọi 

b) Ta có : với mọi 

- Nếu  ta có 

- Nếu , chia cả tử và mẫu của cho ta có: 

Ta có: 

Nên ta có: . Dấu xảy ra khi 

Vậy lớn nhất là khi 

**Bài 20:** Cho thỏa mãn Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời giải**

Ta có: 





Dấu xảy ra  và 

và Vậy nhỏ nhất là 

**Bài 21:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Lời giải**



 với mọi 

 với mọi 



Từ 



**Bài 22:** Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời giải**



Vậy 

**Bài 23:** Cho biểu thức 

1. Tìm điều kiện xác định và rút gọn 
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của  khi 

**Lời giải**

a) ĐKXĐ: 



b)



Vì nên Áp dụng BĐT Cosi ta có: 

Dấu “=” xảy ra 

Vậy của P là 

**Bài 24:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Lời giải**

Ta có: ****



Vậy giá trị nhỏ nhất của là khi 

**Bài 25:**  Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Lời giải**

****

Dấu xảy ra 

Vậy 

**Bài 26:**  Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức : 

**Lời giải**

****Vậy 

**Bài 27:**  a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:



b)Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:



**Lời giải**

1. Ta có: 

Do  Nên 

Dấu “=” xảy ra 

Vậy 

b) 

Do . Đẳng thức xảy ra 

Vậy 

**Bài 28:**  Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : 

**Lời giải**

Ta có :



Vậy 

**Bài 29:**  Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Lời giải**



Vậy giá trị nhỏ nhất của là khi 

**Bài 30.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức biết:



**Lời giải**

Đặt ta có: 



Dấu xảy ra và 

Vậy giá trị nhỏ nhất của  bằng 8 tại 

**Bài 31.**

Cho là các số dương thỏa mãn 

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Lời giải**



Theo BĐT Cô si ta có: Dấu xảy ra 

Tương tự: , dấu “=” xảy ra 

, dấu xảy ra 

Dấu xảy ra 

Vậy khi với 

**Bài 32.** Tìm giá trị nhỏ nhất : 

**Lời giải**



Giá trị nhỏ nhất  khi 

**Bài 33.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: 

**Lời giải**

Ta có: 

Mà 

Vậy giá trị lớn nhất của  là 

**Bài 34.** Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện 0 ≤ a, b, c ≤ 2 và a + b + c = 3

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = a2 + b2 + c2.

**Lời giải**

Từ giả thiết 0 ≤ a, b, c ≤ 2 suy ra (2 – a)(2 – b)(2 – c) + abc ≥ 0

⇔ 8 – 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) ≥ 0

⇔ 8 – 12 + 2ab + 2bc + 2ac ≥ 0 (vì a + b + c = 3)

⇔ 2ab + 2bc + 2ac ≥ 4

⇔ a2 + b2 + c2  + 2ab + 2bc + 2ac ≥ 4 + a2 + b2 + c2

⇔ ( a + b + c)2 ≥ 4 + a2 + b2 + c2

⇔ a2 + b2 + c2 ≤ 5 (vì a + b + c = 3)

Dấu đẳng thức xảy ra ⇔ (a; b; c) = (0; 1; 2) và các hoán vị của bộ số này.

Vậy P có GTLN nhất là 5 ⇔ (a; b; c) = (0; 1; 2) và các hoán vị của bộ số này.

**Bài 35.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: .

**Lời giải**

== ≥ 2

Vậy min C = 2 x = 1

== ≤ 4

Vậy max C = 4 x = -1

**Bài 36.** Cho . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**

****(với mọi 





Vậy giá trị nhỏ nhất của 

**Bài 37.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Lời giải**



**Bài 38**. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Lời giải**



Vậy 

**Bài 39.** Cho các số thực dương thỏa mãn 

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**

1. 



Áp dụng BĐT và với dương, dấu bằng xảy ra 

Ta có: 

Bởi vậy :



Vậy 

**Bài 40:** Cho là các số thực dương thỏa mãn: 

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Lời giải**

Vì  nên:



Ta có:



Tương tự: 

Từ đó . Dấu xảy ra 

Vậy GTNN của là 

**Bài 41:** Cho và Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời giải**



Vậy 

**Bài 42:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



**Lời giải**



Đặt ta có biểu thức:



Dấu xảy ra 



Với thì đạt giá trị nhỏ nhất bằng 

**Bài 43:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**





Vì 

Dấu xảy ra 

**Bài 44:** Cho hai số không âm và  thỏa mãn: Tính giá trị lớn nhất của biểu thức: 

**Lời giải**

Ta có: 

Chứng minh được với hai số dương thì 

Do đó: 

Vậy của S là 1, dạt được khi 

**Bài 45:** Cho là các số dương thỏa mãn Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**

Ta có:

Theo BĐT cô si ta có: Dấu “=” xảy ra 

Tương tự: dấu “=” xảy ra 

, dấu “=” xảy ra 

Dấu “=” xảy ra khi 

Vậy 

**Bài 46:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : 

**Lời giải**



Vậy 

**Bài 47:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Lời giải**



 với mọi 

 với mọi 



Từ 



**Bài 48:** Cho biểu thức 

1. Rút gọn 
2. Tìm giá trị lớn nhất của 

**Lời giải**

****

Vậy với mọi 

b) Ta có : với mọi 

* Nếu  ta có 
* Nếu , chia cả tử và mẫu của cho ta có: 

Ta có: 

Nên ta có: . Dấu xảy ra khi 

Vậy lớn nhất là khi 

**Bài 49:** Cho thỏa mãn Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời giải**

Ta có: 





Dấu xảy ra  và 

và Vậy nhỏ nhất là 

**Bài 50:** Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời giải**



Vậy 

**Bài 51:** Cho và Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Lời giải**

Vì 

Ta có: 





Lại có: 



Vậy là hoán vị của 

**Bài 52:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: 

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: 

**Lời giải**

a) Ta có:



Do 

Nên 

Dấu xảy ra 

Vậy GTNN của là 

B) 

Do nên Dấu xảy ra 

Vậy của là 

**Bài 53:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Lời giải**



Vậy giá trị nhỏ nhất của là khi 

**Bài 54:** Tìm các giá trị của  để biểu thức:

có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Lời giải**



Ta thấy nên 

Do dó 

**Bài 55:** Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời giải**



Vậy 

**Bài 56:** Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời giải**









Vậy giá trị nhỏ nhất của  khi 

**Bài 57:** Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời giải**

Ta có : 

Vì 

Vậy GTNN của 

**Bài 58:** Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: .

**Lời giải:**

**HD:** + Tìm GTLN:

Ta có: 

Dấu “ =” 

Suy ra GTLN(A) = 2 .

+ Tìm GTNN:

Ta có: 

Dấu “ =” 

Suy ra GTNN(A) =  

**Bài 59:** Tìm giá trị của biến *x* để:

a)  đạt giá trị lớn nhất b)  đạt giá trị nhỏ nhất

**Lời giải:**

a)  đạt giá trị lớn nhất.

**HD**: Ta có:  ( Vì 1 > 0 và  )

Dấu « = » 

Suy ra GTLN(P) =  .

b)  đạt giá trị nhỏ nhất

**HD:** ĐKXĐ: ****

Ta có: 

Đặt . Ta có: 

Dấu « = » 

Suy ra GTNN(Q) = 

**Bài 60 :** a) Tìm GTLN của 

b) Tìm GTNN của biểu thức  , với 

**Lời giải:**

a) Tìm GTLN của 

Ta có: 

Đặt , khi đó: 

Dấu “=” 

Suy ra 

b)Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  , với .

Ta có: 

Dấu “ =” 

Vậy, GTNN(B) =.

***Chú ý: BĐT AM-GM cho 2 số  không âm, ta có: . Dấu “=”***

***\* Cách biến đổi B :*** Ta viết .

Biến đổi và đồng nhất thức hai vế, suy ra .

**Bài 61:** Tìm GTNN của:

a)  ; b)  ; c) 

**Lời giải:**

Tìm GTNN của:

a) Ta có: 

( Vì  nên , dùng BĐT Cô-si cho hai số dương  và  )

Dấu « = » 

Suy ra .

b) 





Dấu “=”  ( thỏa )

Suy ra 

c) 



Dấu “=”  ( thỏa )

Suy ra .

**Bài 62:**  Cho hai số x và y thoả mãn điều kiện: 

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức ;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Lời giải:**

1. ***Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức ***

Từ ,

Khi đó, 

 

Dấu “=”

Suy ra 

1. ***Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức ***

Từ ,

Khi đó, 



Dấu « = » 

Suy ra 

**Bài 63:** a) Cho x, y là các số dương thoả mãn .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

b) Tìm GTLN của 

**Lời giải:**

a) Ta có : 



Dấu “=”

Suy ra GTNN(Q) = 7.

b) Ta có:







Dấu “=”

Suy ra GTLN(A) = 1

**Bài 64:** a) Cho , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

b) Tìm GTNN của 

**Lời giải:**

a) Ta có:  ( Vì )

 ( Vì  )

 

Dấu “=” 

Suy ra .

b) Tìm GTNN của 

Ta có: 





Dấu “=” 

Suy ra  và .

**Bài 65:** a) Tìm GTNN của biết 

b) Tìm GTNN của 

c) Tìm GTNN của 

d) Tìm GTLN của  với 

**Lời giải:**

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của:  biết 

**\* Cách 1 :** Ta có: + = 4 + 2+ = 16 (1)

Ta lại có: - 2+ 0 (2)

Từ (1) và (2) suy ra 2+ 2 16 +   8

Vậy giá trị nhỏ nhất của 

**\* Cách 2:**  Ta có : 

Suy ra 

Dấu “=” 

Vậy, .

b) Ta có :  

Dấu “=”

Suy ra GTNN (B ) = 5

c) Ta có: 

Đặt  ***( chú ý :  )***

Khi đó, 

Dấu “=”

d) Tìm giá trị của  để biểu thức sau đạt GTLN:  với 

**\*Cách 1:** Đặt 

Khi đó 

( Vì  ).

Dấu “=”.

Suy ra .

**\*Cách 2:** Đặt 

Ta có:  ( Vì  nên )

Suy ra  ( Vì  )

Dấu “=”.

Suy ra .

**Bài 66:** Tìm giá trị nhỏ nhất của  và các giá trị của  tương ứng.

**Lời giải:**

Tìm giá trị nhỏ nhất của  và các giá trị của  tương ứng.

Ta biết: .

Đặt: .

Khi đó biểu thức (\*) viết thành: .

Dấu “=” xảy ra 

.

\*) .

\*) .

Vậy  

**Bài 67:** Cho thỏa mãn Tìm giá trị nhỏ nhất của  GTLN

**Lời giải**

Ta có: 





Dấu xảy ra  và 

và Vậy nhỏ nhất là 

**Bài 68:** Cho hai số không âm và  thỏa mãn: Tính giá trị lớn nhất của biểu thức: 

**Lời giải**

Ta có: 

Chứng minh được với hai số dương thì 

Do đó: 

Vậy của S là 1, dạt được khi 

**Bài 69:** Cho hai số dương thỏa mãn: 

Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời giải**



**.** Dấu xảy ra 

Vậy GTNN của 

**Bài 70:** Cho là các số thực không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của :biết 

**Lời giải**

Áp dụng công thức Bunhiacopski ta có:



Vậy GTNN của là 

**Bài 71:** Tìm các giá trị của để biểu thức:có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Lời giải**



Ta thấy nên 

Do dó 

**Bài 72:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**



Do 

Đẳng thức xảy ra  Vậy với thì L có giá trị nhỏ nhất.

Giá trị nhỏ nhất của L là 8

**Bài 73:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**Lời giải**



Vậy GTNN của là khi 

**Bài 74:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Lời giải**



 với mọi 

 với mọi 



Từ 



**Bài 75:** Cho Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : 

**Lời giải**

Đặt 





**Bài 76:** Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: .

**Lời giải**

+ Tìm GTLN:

Ta có: 

Dấu “ =” 

Suy ra GTLN(A) = 2 .

+ Tìm GTNN:

Ta có: 

Dấu “ =” 

Suy ra GTNN(A) =  

**Bài 77:** Tìm giá trị của biến *x* để:

a)  đạt giá trị lớn nhất b)  đạt giá trị nhỏ nhất

**Lời giải**

a)

Ta có:  ( Vì 1 > 0 và  )

Dấu « = » 

Suy ra GTLN(P) =  .

b) ĐKXĐ: ****

Ta có: 

Đặt . Ta có: 

Dấu « = » 

Suy ra GTNN(Q) = 

**Bài 78:** a) Tìm GTLN của 

b) Tìm GTNN của biểu thức  , với 

**Lời giải**

a) Tìm GTLN của 

Ta có: 

Đặt , khi đó: 

Dấu “=” 

Suy ra 

b)Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  , với .

Ta có: 

Dấu “ =” 

Vậy, GTNN(B) =.

**Bài 79:** Tìm GTNN của:

a)  ; b)  ; c) 

**Lời giải**

a) Ta có: 

( Vì  nên , dùng BĐT Cô-si cho hai số dương  và  )

Dấu « = » 

Suy ra .

b)Ta có 





Dấu “=”  ( thỏa )

Suy ra 

c) 



Dấu “=”  ( thỏa )

Suy ra .

**Bài 80:** Cho hai số x và y thoả mãn điều kiện: 

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức ;
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Lời giải**

1. ***Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức ***

Từ ,

Khi đó, 

 

Dấu “=”

Suy ra 

1. ***Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức ***

Từ ,

Khi đó, 



Dấu « = » 

Suy ra 

**Bài 81:** a) Cho x, y là các số dương thoả mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

1. Tìm GTLN của 

**Lời giải**

a) Ta có : 



Dấu “=”

Suy ra GTNN(Q) = 7.

b) Ta có:







Dấu “=”

Suy ra GTLN(A) = 1

**Bài 82:** a) Tìm GTNN của biết 

b) Tìm GTNN của 

c) Tìm GTNN của 

d) Tìm GTLN của  với 

**Lời giải**

a) **\* Cách 1 :** Ta có: + = 4 + 2+ = 16 (1)

Ta lại có: - 2+ 0 (2)

Từ (1) và (2) suy ra 2+ 2 16 +   8

Vậy giá trị nhỏ nhất của 

**\* Cách 2:**  Ta có : 

Suy ra 

Dấu “=” 

Vậy, .

b) Ta có :  

Dấu “=”

Suy ra GTNN (B ) = 5

c) Ta có: 

Đặt  ***( chú ý :  )***

Khi đó, 

Dấu “=”

d) Tìm giá trị của  để biểu thức sau đạt GTLN:  với 

**\*Cách 1:** Đặt 

Khi đó 

( Vì  ).

Dấu “=”.

Suy ra .

**\*Cách 2:** Đặt 

Ta có:  ( Vì  nên )

Suy ra  ( Vì  )

Dấu “=”.

Suy ra .

**Bài 83: :** a) Cho , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

b) Tìm GTNN của 

**Lời giải**

a) Ta có:  ( Vì )

 ( Vì  )





Dấu “=” 

Suy ra .

b) Tìm GTNN của 

Ta có: 





Dấu “=” 

Suy ra  và .

**Bài 84:** Tìm giá trị nhỏ nhất của  và các giá trị của  tương ứng.

**Lời giải**

Ta biết: .

Đặt: .

Khi đó biểu thức (\*) viết thành: .

Dấu “=” xảy ra 

.

\*) .

\*) .

Vậy  

**Bài 85:** Cho và Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời giải**

**Ta có:**



Vậy 

**Bài 86:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

**Lời giải**

Ta có:

Vì x2 + x + 1 =

Suy ra :

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

**Bài 87:** Cho hai số không âm a và b thỏa mãn: a2 + b2 = a + b. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

**Lời giải**

Ta có:

Chứng minh được với hai số dương x,y thì

Do đó:

Vậy GTLN của S là 1, dạt được khi a = b = 1

**Bài 88:** Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn x + y + z =1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

**Lời giải**

Ta có:

Theo BĐT cô si ta có : . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi y = 2x

Tương tự : . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi z = 4x

. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi z = 2y

Suy ra: . Dấu “=” xảy ra khi

Vậy: Min P =

**Bài 89:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

**Lời giải**

Ta có:

Vậy Min P = 8100312,5

**Bài 90:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**



Vậy giá trị nhỏ nhất của A là khi 

**Bài 91:** a. Tìm giá trị lớn nhất của tổng x + y + z biết rằng x + 5y = 21 và 2x + 3z = 51 với x, y, z  0

b. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của các phân thức B = 

**Lời giải**

a) Cộng vế với vế của các đẳng thức x + 5y = 21 và 2x + 3z =51 ta được

3(x + y + z) + 2y = 72

Như vậy 3(x + y + z) lớn nhất khi và chỉ khi 2y nhỏ nhất . Mặt khác y  0 nên 2y nhỏ nhất khi y = 0  x = 21 và z = 3

Do đó 3(x + y + z) lớn nhất bằng 72  x + y + z lớn nhất bằng 24 khi x = 21; y = 0 và z = 3

b) Ta có  =   minB = -1 với x = -2

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là B = -1 khi x = -2

Mặt khác ta lại có  = 

 maxB = 4 với x = 

Vậy giá trị lớn nhất của B là B = 4 khi x = 

**Bài 92:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**Lời giải**

Ta có = 



Đẳng thức xảy ra khi 

Vậy Min P = 

**Bài 93:** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Lời giải**

Ta có  với mọi x, y.



P =  khi x = 10 và y = 10

Vậy Max **P** =  khi x = 10 và y = 10.

**Bài 94:** Cho các số a, b,c thỏa mãn a + b + c = . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = a2 + b2 + c2

**Lời giải**

Ta có:  với mọi a

 với mọi a

 với mọi a (1)

Tương tự:  với mọi b (2)

 với mọi c (3)

Cộng vế với vế của (1), (2) và (3) ta được :

.

Vì  nên: P = 

Dấu “=” xảy ra khi a = b = c =.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là đạt được khi và chỉ khi a = b = c =.

**Bài 95:** Cho hai số dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Lời giải**



= 

= 

Áp dụng BĐT AM-GM ta có  (\*)



Áp dụng BĐT AM-GM và kết hợp (\*) ta có:



Đẳng thức xảy ra . Vậy  khi .

**Bài 96:**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức , trong đó *x*, *y* là các số thực thoả mãn điều kiện: .

**Lời giải**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức , trong đó *x*, *y* là các số thực thoả mãn điều kiện: .



Ta có: (2)



Mặt khác: (3)



Từ (2) và (3) suy ra:



Hay : .Do đó .



Đẳng thức xảy ra khi: (4).



Từ (1) và (4) ta có: .



Vậy *Min* (*P*) = 0 khi *x* = *y* =1.

**Bài 97:**

a) Cho thoả mãn .



Tìm GTNN của biểu thức .



b) Cho thoả mãn .



Tìm GTNN của biểu thức .



**Lời giải**

a) Ta có:



Dấu “=” .



Vậy, . Dấu “=” .



b) Ta có:



Dấu “=” .



Vậy, . Dấu “=” .



**Bài 98:** Cho *m*, *n* là các số thực thay đổi sao cho . Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:.

**Lời giải**

Cho *m*, *n* là các số thực thay đổi sao cho  (1). Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: (2).

Từ (2) ta có:



Do đó:



Suy ra: (do (1)) .



Dấu “=” xảy ra .



Vậy Min *Q* = -2 khi *m* =-2, *n* =1 hoặc *m* =1, *n* = -2.

**Bài 99:**

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Lời giải**

Ta có:



Dấu “=”



Suy ra



Ta có:



Dấu “=”



Suy ra



**Bài 100:**

Cho là các số thực dương thỏa mãn:



Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Lời giải**

Vì nên:



Ta có:



Tương tự:



Từ đó . Dấu xảy ra



Vậy GTNN của là



**Bài 101:** Cho các số thực dương thỏa mãn



Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



**Lời giải**



Áp dụng BĐT và với dương, dấu bằng xảy ra



Ta có:



Bởi vậy :



Vậy



**Bài 102:** Cho hai số thỏa mãn điều kiện Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức



**Lời giải**



Ta có:



Vậy



. Vậy



**Bài 103:** Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời gải**



Vậy 

**Bài 104:** Cho là các số dương thỏa mãn 

**Lời gải**

Theo BĐT cô si ta có: 

Tương tự 

. Dấu bằng xảy ra khi 

**Bài 105**: Cho là 3 số dương thỏa mãn: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Lời gải**

Ta có: 

Tương tự: 



Dấu xảy ra 

**Bài 106:** Cho Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời gải**

Đặt . Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

hay  Dấu bằng xảy ra 

**Bài 107**: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**





Giá trị nhỏ nhất của là 

Nên giá trị nhỏ nhất của là 

**Bài 108:** Cho và Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



**Lời giải**



Dấu xảy ra 

Vậy 

**Bài 109:**

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: 
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: 
3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**

1. Ta có:



Do 

Nên 

Dấu xảy ra 

Vậy GTNN của là 

1. 

Do nên Dấu xảy ra 

Vậy của là 

1. Ta có:

Nhận thấy với mọi ta có: 

Dấu xảy ra khi 

Vậy Giá trị nhỏ nhất của là đạt được khi 

**Bài 110:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



**Lời giải**



Đặt ta có biểu thức:



Dấu xảy ra 



Với thì đạt giá trị nhỏ nhất bằng 